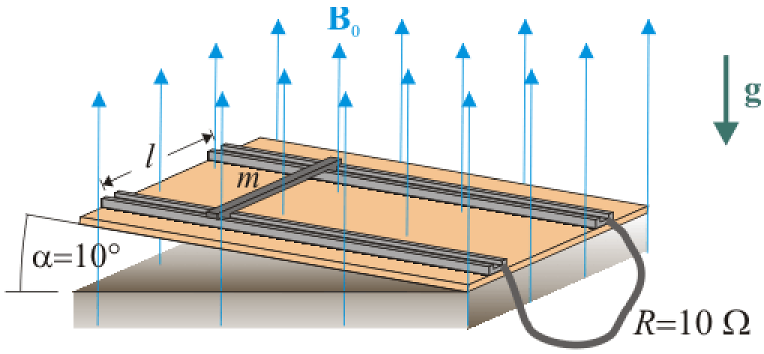
1 Enunciado

Una varilla conductora de masa $m = 2.0\,\mathrm{kg}$ se deja caer deslizando sin rozamiento por dos guías metálicas paralelas separadas una distancia $l = 5.0\,\mathrm{m}$ contenidas en un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = 10^o$ con la horizontal. La dirección de la varilla es, en todo instante, perpendicular a las guías, las cuáles tienen conectados sus extremos mediante un cable de resistencia eléctrica $R = 10\,\Omega$, que cierra el circuito. Las resistencias eléctricas de la varilla y las guías son despreciables. El sistema descrito se halla inmerso en un campo magnético uniforme y constante, $\mathbf{B}_0$, de $0.5\,\mathrm{T}$ de intensidad, aplicado en dirección vertical y sentido contrario a la gravedad. Calcule:



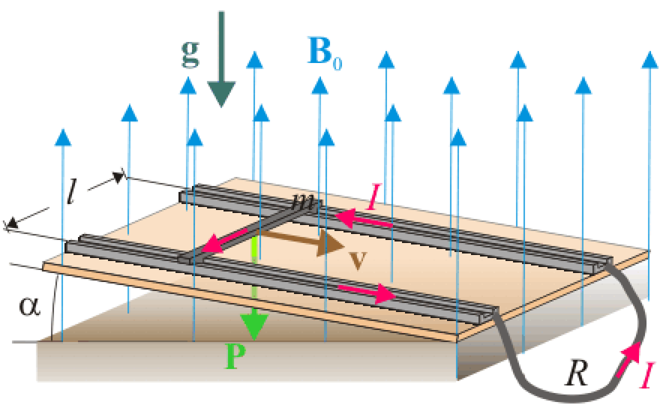
1. Corriente inducida en el circuito y velocidad límite que alcanzará la varilla.
2. Potencia disipada por efecto Joule en la resistencia. Compare esta potencia con el trabajo que por unidad de tiempo realiza la fuerza peso sobre la varilla.

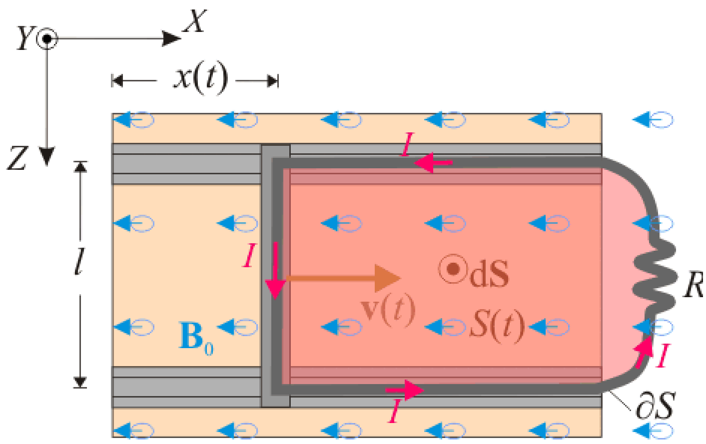
2 Solución

Las dos guías paralelas conectadas por el cable y en contacto con la varilla móvil, constituyen un circuito cerrado ∂S por el que puede circular una corriente eléctrica, al tratarse de materiales conductores. Al poder desplazarse la varilla sobre las guías, se trata de un circuito variable en el que las resistencias eléctricas de estos elementos son despreciables frente a la $R = 10\,\Omega$ del cable.

2.1 Intensidad de corriente y velocidad límite

Consideremos la superficie plana S delimitada por el circuito ∂S. La acción de la gravedad sobre la varilla pesada provoca el deslizamiento (sin rozamiento apreciable) de ésta sobre las guías inclinadas un ángulo α respecto de la horizontal y, por tanto, la variación del área de dicha superficie, $S = S(t)$. Esto se traducirá también en la variación del flujo a través de aquélla del campo magnético existente y, en virtud de la ley de inducción electromagnética, producirá una fuerza electromotriz inducida y una intensidad de corriente I en el circuito ∂S.





Adoptamos un sistema de referencia cartesiano cuyo eje X es paralelo a las guías, y con el eje Y perpendicular al plano inclinado que las soporta. La varilla móvil se mantendrá siempre paralela al eje X, y su desplazamiento estará descrito por una vector velocidad $\mathbf{v}(t) = v(t)\,\mathbf{i}$.

2.1.1 Flujo del campo magnético y fuerza electromotriz inducidad en el circuito

En primer lugar, procederemos a discutir acerca del campo magnético existente en el el entorno del circuito: por un lado, está el campo uniforme aplicado en la dirección de la vertical gravitatoria, y cuya descripción analítica en el sistema de referencia adoptado será:

$$\mathbf{B}_0 = B_0\,(-\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j})\,, \quad \text{con} \quad B_0 = |\mathbf{B}_0| = 0.5\,\mathrm{T}$$

Pero si el movimiento de la varilla tiene como consecuencia la aparición de una fuerza electromotriz y una corriente I inducidas, esta última será fuentes de un campo magnético, que denominaremos $\mathbf{B}_{\text{ind}}$, y que también contribuirá al flujo magnético a través de la superficie delimitada por el circuito/espira ∂S. Nótese que este flujo del *campo inducido* va a ser proporcional a la intensidad de corriente I que lo genera, siendo la constante de proporcionalidad la **autoinducción** L de la espira que, por otra parte, será variable al cambiar la forma de la ésta:

$$\Phi_m\big\rfloor_S(t) = \int_{S(t)} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{ind}}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S(t)} \mathbf{B}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + L(t)I(t)$$

El valor de la autoinducción de la espira variable no es conocido, ni tampoco fácil de determinar. Sin embargo, esto no supone problema alguno pues la contribución al flujo magnético de la corriente inducida puede ser despreciada frente al flujo del campo uniforme, siempre que la intensidad de éste tenga un valor apreciable, como es el caso. Obsérvese que cuando la varilla empieza a moverse, la intensidad de corriente inducida es casi nula y, en general esto mismo ocurre con la autoinducción de la espira, de manera que el producto de ambas cantidades va a perfectamente despreciable frente al flujo de un campo de magnético de medio tesla. Cuando la varilla aumente su velocidad, la intensidad de corriente inducida también irá aumentando, pero esto ocurre a costa de que el circuito/espira se vaya haciendo cada vez más pequeño y, por tanto, que disminuya el valor de la autoinducción. En consecuencia, la contribución al flujo del campo magnético inducido se mantendrá siempre en valores casi nulos:

$$\forall t\,, \quad L(t)I(t) \simeq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi_m\big\rfloor_{S(t)} \simeq \int_{S(t)} \mathbf{B}_0 \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = B_0 \cos\alpha\, S(t)$$

donde los elementos de superficie en la $S(t)$ tiene la dirección y sentido del eje Y, $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S\,\mathbf{j}$. Por su parte, el área de la superficie plana delimitada por el circuito en un instante arbitario t, tras iniciarse el movimiento de la varilla, será igual al valor inicial S_0 de dicha superficie menos el área del rectángulo barrido por la varilla en su movimiento durante dicho intervalo de tiempo; es decir,

$$S(t) = S_0 - lx(t) \quad \Longrightarrow \quad \Phi_m(t)\big\rfloor_{S(t)} = B_0 \cos\alpha\,[S_0 - lx(t)]$$

siendo $x(t)$ la distancia recorrida por la varilla en un tiempo t, desde su posición inicial.

2.1.2 Fuerza electromotriz inducida y expresión de la intensidad de corriente

La ecuación del circuito ∂S establece que la suma de todas las fuerzas electromotrices (de generadores y/o inducidas) presentes en la espira, serán iguales a las caídas de tensión de las diferentes resistencias en serie existentes en el circuito.

$$\sum_i \mathcal{E}^i_{\text{gen}} + \mathcal{E}_{\text{ind}} = \sum_j R_j I_j$$

En este caso, la única fuerza electromotriz es la inducida debido al la variación instantánea del flujo magnético a través del circuito/espira:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}\bigg\rfloor_{S(t)} = lB_0\cos\alpha\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = lB_0\cos\alpha\; v(t)$$

ya que la celeridad instantánea con que la se desplaza a lo largo del eje X es... $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$.

La intensidad de corriente será la misma $I(t)$ inducida en todos los puntos del circuito, y la única resistencia apreciable es la R del cable. Se tendrá, por tanto:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = RI(t) \quad \Longrightarrow \quad I(t) = \frac{l\,B_0\cos\alpha}{R}\; v(t)$$

Es decir, en cada instante de tiempo la intensidad de la corriente que recorre el circuito es proporcional a la velocidad de la varilla, donde la constante de proporcionalidad está determinada por la intensidad y dirección del campo mangético, la separación de las guías y la resistencia eléctrica del cable. Por otra parte, siempre que la varilla descienda por el plano inclinado, moviéndose en el establecido como sentido positivo del eje X, la intensidad de corriente también va a ser positiva; es decir, que la corriente eléctrica inducida recorrerá el circuito/espira ∂S en el sentido antihorario, que es el sentido positivo congruente con la elección que hemos hecho de los $\mathrm{d}\mathbf{S}$.

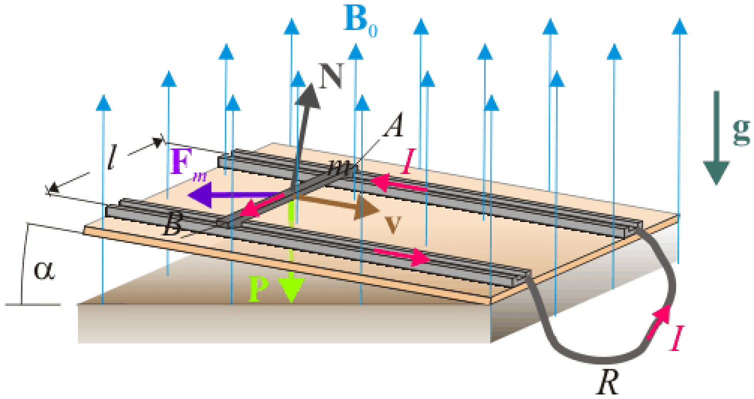
Obsérvese también cómo se verifica la ley de Lenz: el movimiento de la varilla provoca una disminución del área delimitada por el circuito y una disminución también del flujo magnético ya que, con la elección de los $\mathrm{d}\mathbf{S}$, dicho flujo es positivo. La corriente inducida tiene sentido positivo, de manera que creará un campo magnético en el sentido de los $\mathrm{d}\mathbf{S}$, que contribuirá al aumento del flujo magnético oponiéndose, por tanto, al efecto del movimiento de la varilla sobre dicha magnitud.

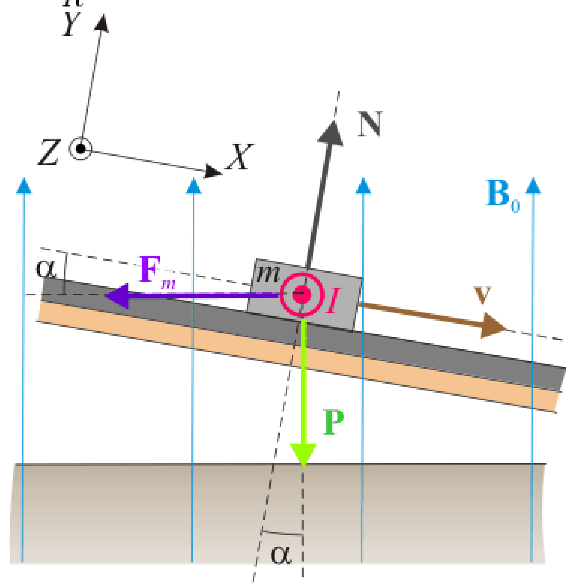
2.1.3 Velocidad límite de la varilla e intensidad máxima en el circuito

Para completar el análisis del sistema debemos determinar cómo es la ley $v(t)$ que describe la evolución de la velocidad de la varilla o, al menos, obtener la ecuación diferencial que gobierna dicha evolución. Para ello aplicamos, la segunda ley de Newton: la resultante de las fuerzas qué actúan sobre la varilla es igual al producto de la masa por la aceleración del centro de masas de la varilla. Las fuerzas que actúan sobre ésta son: la fuerza peso $\mathbf{P}$, o acción de la gravedad, la fuerza de reacción normal $\mathbf{N}$, que impide cualquier movimiento de la varilla que no sea el deslizamiento sobre las guías, y la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ que ejerce el campo magnético $\mathbf{B}_0$ sobre la corriente eléctrica inducida $I(t)$, entre los extremos A y B de la varilla:

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = mg\,(\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{i} - \cos\alpha\,\mathbf{j})\,; \qquad \mathbf{N} = N\,\mathbf{j} \quad (N \geq 0)$$

$$\mathbf{F}_m = \int_A^B I\,\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{B}_0 = I(t)\,\overrightarrow{AB}\times\mathbf{B}_0 \quad\longrightarrow\quad \mathbf{F}_m = -\frac{l^2 B_0^2 \cos\alpha}{R}\,v(t)\,[\cos\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}]$$





Como la varilla no puede girar debido al contacto con las guías, la aceleración del centro de masas es la misma que la de cualquiera de sus puntos y, por tanto, será igual a la variación por unidad de tiempo de la velocidad instantánea de la varilla, $\mathbf{v}(t) = v(t)\,\mathbf{i}$. Se obtienen, entonces las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{P}+\mathbf{N}+\mathbf{F}_m = m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{i} \quad\longrightarrow\quad \begin{cases} mg\operatorname{sen}\alpha - \dfrac{l^2 B_0^2\cos^2\alpha}{R}\,v(t) = m\,\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} & (1) \\[2ex] -mg\cos\alpha + N - \dfrac{l^2 B_0^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{R}\,v(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

La ecuación (2) sólo permite determinar el valor de la fuerza de reacción vincular equivalente a la acción de las dos guías sobre la varilla, mientras que (1) es la ecuación característica de la evolución de la velocidad de la varilla. La solución de esta ecuación diferencial nos proporciona una descripción instantánea del movimiento de la varilla, a partir de la cual, se podrá determinar la evolución temporal de la intensidad de corriente inducida en el circuito variable bajo estudio.

Sin embargo, en el enunciado sólo se piden los valores máximos que van a alcanzar dichas magnitudes físicas, los cuales pueden obtenerse a partir de la ecuación diferencial (1), aunque sin necesidad de resolverla explícitamente. Veamos: en el instante inicial, en el cual suponemos que la varilla está en reposo, no hay fuerza magnética actuando sobre ésta, por lo que la aceleración inicial es debida exclusivamente a la componente de la dirección X de la fuerza peso (que se mantiene constante en todo instante):

$$v(t=0)=0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0} = a(t=0) = g\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

De esta forma, la velocidad de la varilla comienza a crecer, pero esto hace que aumente la intensidad de corriente en el circuito y, en consecuencia, la fuerza magnética sobre la varilla que, como hemos visto, es proporcional a la velocidad y tiende a frenar el movimiento de la varilla en el sentido positivo del eje X. Es decir, la acelaración de la varilla será cada vez menor cuanto mayor es su velocidad hasta que, e incluso aquella tiende a anularse conforme la velocidad se aproxima a cierto valor crítico v_l que depende de los parámetros geométricos y eléctricos del sistema, así como del campo magnético externo aplicado:

$$v_l = \frac{mgR\,\mathrm{sen}\,\alpha}{l^2B_0^2\cos^2\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \underset{v\to v_l}{\longrightarrow} 0$$

Obsérvese que esto ocurre según la fuerza magnética sobre la varilla va creciendo paulatinamente y tiende a compensar o anular la componente X de la fuerza peso. Y cuando la aceleración de la varilla tiende a anularse, la velocidad de la varilla y, por tanto,la intensidad y la fuerza magnética tenderán a estabilizarse en valores constantes que dan lugar a una situación de equilibrio dinámico en que la resultante de todas las fuerzas es el vector nulo, de manera que la varilla realiza un movimiento rectilíneo uniforme. Se tendrá, por tanto, que el valor crítico de velocidad antes determinado será el límite máximo para la velocidad de la varilla, el cuál se corresponderá con un valor máximo de intensidad de corriente en el circuito:

$$v_{\max} = v_l = \frac{mgR\,\mathrm{sen}\,\alpha}{l^2B_0^2\cos^2\alpha} \simeq 5.6\,\mathrm{m/s} \quad \Longrightarrow \quad I_{\max} = \frac{mg\,\mathrm{sen}\,\alpha}{lB_0\cos\alpha} = \frac{mg}{lB_0}\,\tan\alpha \simeq 1.4\,\mathrm{A}$$

Nótese que el valor de intensidad máxima es el que da lugar a una fuerza magnética sobre la varilla que anula el efecto de la componente tangencial de la gravedad sobre ella.

2.2 Estudio energético en el estadio estacionario

Realizaremos un estudio de los aspectos energéticos del sistema cuando alcanza el estadio estacionario o de equilibrio dinámico; es decir, cuando la velocidad de la varilla y las intensidad de corriente han alcanzado su valores máximos y la varilla se desliza con movimiento rectilíneo uniforme:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathrm{est}} &= v_{\max}\,\mathbf{i} \\ I_{\mathrm{est}} &= I_{\max} \end{aligned}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathbf{P}+\mathbf{N}+\mathbf{F}_m]_{\mathrm{est}} = \mathbf{0}$$

En esta situación de movimiento rectilíneo, el trabajo elemental realizado por cada una de las fuerzas aplicadas es igual al producto escalar de la fuerza por un desplazamiento infinitesimal de la varilla, $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x\,\mathbf{i}$. Y si se multiplica la anterior ecuación vectorial por un desplazamiento elemental, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} \delta W_g &= \mathbf{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathrm{d}U_g \\ \delta W_{\mathrm{vinc}} &= \mathbf{N}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \\ \delta W_m &= \mathbf{F}_m\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \end{aligned}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad [-\mathrm{d}U_g + \delta W_m]_{\mathrm{est}} = 0$$

Es decir, el teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética permite establecer a priori que, cuando el sistema alcanza el estado estacionario en el cual la varilla se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, el trabajo elemental realizado en cada instante por la fuerza magnética que actúa sobre la varilla, es igual a la variación de energía potencial gravitatoria de ésta.

Podemos comprobarlo evaluando las cantidades de trabajo que por unidad de tiempo realizan la fuerza peso y la magnética cuando actúan sobre la varilla. La potencia instantánea desarrollada por la fuerza magnética es:

$$\left.\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{est}} = \mathbf{F}_m(I_{\mathrm{est}})\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{est}} = -\frac{l^2B_0^2\cos^2\alpha}{R}\,v_{\max}^2 = -\frac{m^2g^2R\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{l^2B_0^2\cos^2\alpha} < 0$$

donde el signo negativo indica que dicha fuerza realiza un trabajo de "frenado de la varilla"; es decir, actúa como una fuerza disipativa que se opone a su desplazamiento. La potencia desarrollada por la fuerza peso es, en cada instantante a la variación por unidad de tiempo de la energía potencial gravitatoria de la varilla:

$$-\left.\frac{\mathrm{d}U_g}{\mathrm{d}t}\right]_{\text{est}} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{v}_{\text{est}} = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\,v_{\max} = \frac{m^2g^2R\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{l^2B_0^2\cos^2\alpha} > 0$$

Y efectivamente, tal como adelantaba el teorema de las fuerzas vivas, comprobamos que...

$$\left.\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}\right]_{\text{est}} = \left.\frac{\mathrm{d}U_g}{\mathrm{d}t}\right]_{\text{est}}$$

Es decir, la disminución de energía potencial gravitatoria no se traduce en un aumento de la energía cinética de la varilla (en el estacionario la velocidad es constante), sino que aquélla es elimanada por el trabajo negativo que realiza la fuerza magnética que, como ya hemos dicho, se comporta como una fuerza disipativa. Pero, ¿de qué forma se disipa?. ¿Qué mecanismo sirve a la fuerza magnética para eliminar la energía potencial de la varilla manteniendo constante su energía cinética?

2.2.1 Potencia disipada por efecto Joule

Calculamos la potencia disipada en el circuito en forma de calor, a causa del efecto Joule, cuando el sistema ha alcanzado el estado estacionario:

$$P_{\text{Jou}}\Big]_{\text{est}} = RI_{\max}^2 = \frac{m^2g^2R\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{l^2B_0^2\cos^2\alpha} = \left|\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{est}} = \left|\frac{\mathrm{d}U_g}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{est}} \simeq 19.6\,\mathrm{w}$$

Es decir, toda la energía potencial gravitoria que pierde la varilla en su descenso con velocidad máxima y constante, se transforma en calor en virtud del efecto Joule asociado a la corriente eléctrica inducida en el circuito a causa, precisamente, del movimiento de la varilla.

3 Anexo: solución instantánea

La evolución en el tiempo de la *celeridad* de la varilla a partir del instante $t = 0$ en que se inicia su movimiento, está gobernada por la ecuación diferencial (1) del apartado 2.1.3, que podemos reformular de la siguente forma:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda\ v(t) = g\,\mathrm{sen}\,\alpha\,; \qquad \text{con}\ \ \lambda = \frac{l^2B_0^2\cos^2\alpha}{mR}$$

Es decir se trata de una ecuación diferencial inhomogénea de primer orden en la variable tiempo para la magnitud física $v(t)$, donde el factor λ y el segundo miembro de la ecuación son valores constantes que dependen de los valores de los distintos paramétros (geometría, campo magnético externo, resistencia eléctrica), que intervienen en el sistema.

La solución de esta ecuación diferencial será la ley horaria que sigue la celeridad $v(t)$ en el sistema bajo estudio. Dicha solución es igual a la suma de una solución particular $v_I(t)$ de la ecuación, más la solución general de la ecuación diferencial homogénea, $v_H(t)$.

Una solución particular de la ecuación diferencial es muy fácil de determinar ya que, como el segundo miembro de la ecuación no es función de la variable tiempo, habrá un valor de celeridad constante que verificará dicha ecuación:

$$v_I(t) = v_I\ ,\ \ \text{cte.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\frac{\mathrm{d}v_I}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \lambda\ v_I = g\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Obsérvese que esta solución particular es igual al valor crítico de velocidad que, mediante argumentos cualitativos, dedujimos en el apartado 2.1.3 como valor máximo posible para la velocidad de la varilla:

$$v_I = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\lambda} = \frac{mgR\,\mathrm{sen}\,\alpha}{l^2B_0^2\cos^2\alpha} = v_l$$

La solución general de la ecuación diferencial homogénea es la familia de funciones del tiempo que verifiquen la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}v_H(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda\, v_H(t) = 0$$

la cuál se puede integrar fácilmente por separación de variables:

$$\int \frac{\mathrm{d}v_H}{v_H} = -\lambda \int \mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad \ln v_H = -\lambda\, t + \ln C \quad \longrightarrow \quad v_H(t) = Ce^{-\lambda t}$$

donde C es una constante de integración. La solución general de la ecuación diferencial planteada es:

$$v(t) = v_l + Ce^{-\lambda t}$$

Y para que sea la ley horaria de la velocidad de la varilla en el sistema bajo estudio, esta solución deberá verificar las condiciones iniciales impuestas en dicho sistema, lo cuál fijará el valor de la constante C. Asimiendo que la varilla se encontraba en reposo cuando en el instante $t = 0$ comienza a deslizar sobre las guías, se tendrá que:

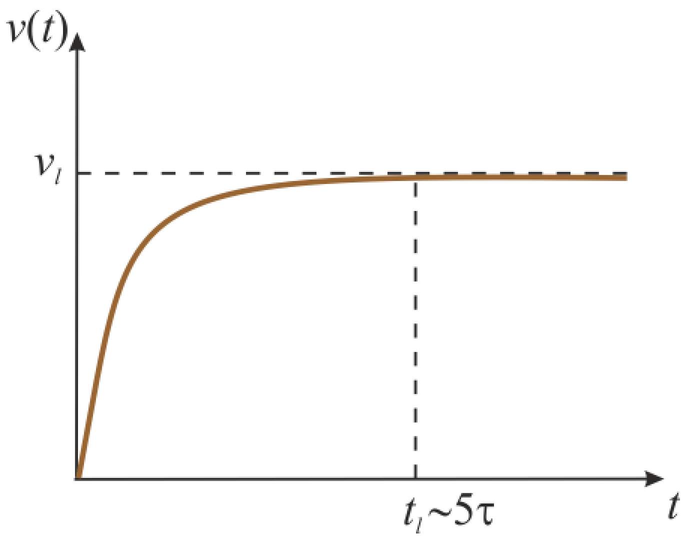
$$v(t=0) = v_l + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -v_l \quad \Longrightarrow \quad v(t) = v_l\,\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

Es decir, la varilla parte del reposo y aumenta su velocidad de manera exponencial hasta el valor v_l, que alcanzará al cabo de un tiempo infinito, tratándose por tanto de un límite máximo para dicha magnitud:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = v_l \quad \Longrightarrow \quad \forall\, t \;\; v(t) < v_l = v_{\max}$$

Obsérvese que este resultado parece no coincidir con el análisis cualitativo que se llevo a cabo en el [apartado 2.1.3] para determinar dicha velocidad límite, donde se daba a entender que el sistema alcanzaría el estado de estacionario (varilla con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado) al cabo de un cierto intervalo (finito) tiempo. Podría argumentarse que la ecuación diferencial que hemos resuelto constituye un modelo ideal del sistema, en el cuál se están despreciando ciertos parámetros como la autoinducción del circuito variable, o la resistencia eléctrica de las guías y la varilla. Sin embargo, podemos comprobar que la ley horaria $v(t)$ obtenida con este modelo ideal, proporciona una descripción bastante precisa del comportamiento de la varilla. Podemos definir un "tiempo característico" τ del sistema (llamado *constante de tiempo* o *tiempo de relajación*),

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{mR}{l^2 B_0^2 \cos^2\alpha} \simeq 3.3\,\mathrm{s}$$



tal que para instantes del orden de una pocas veces τ, la varilla tendrá un velocidad muy próxima su valor límites. Por ejemplo, cuando el tiempo transcurrido desde el inicio del movimiento es cinco veces el valor de la constante de tiempo, la velocidad de la varilla casi habrá alcanzado el valor límite, con un error inferior al $1\,\%$:

$$v(5\tau) = v_l\,\left(1 - e^{-5}\right) \simeq 0.993\,v_l$$

Para instantes posteriores, la velocidad de la varilla estará a aún más próxima al valor v_l.

Por otra parte, en el [apartado 2.1.2] se determinó que la intensidad de corriente inducida en el circuito/espira ∂S, debido al movimiento de la varilla, va a ser en todo instante proporcional a la velocidad de la ésta. Por tanto, esta magnitud eléctrica presenta un comportamiento en el tiempo completamente similar a la $v(t)$:

$$I(t) = I_l\,\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\,, \qquad \text{con} \;\; I_l = \frac{lB_0\cos\alpha}{R}\,v_l = \frac{mg}{lB_0}\;\tan\alpha = I_{\max}$$